1083. 前談話　　　ノ訂正及ビ積分可能ナ函數環ニツイテ

深宮　政範（阪大）

1. 前談話　　　ニ於テ commutative topological group G ガ locally bicompact 且ツ separable ナトキニ, G ノ invariant Haar measure ヲ用ヒテ, G ノ上ノ $L' = L'(G)$, 夫ノ作ル unit ノアル normed ring L ヲ考ヘ, L ガ N-ring ニナルコトヲ証明シタ積リデヰマシタガ, 証明ハ筆

者ノ大変ナ誤解デ、全ク<u>ナンセンス</u>デシタノデ、甚ダ恐縮デス、皆様ニ御詫ビ致シ訂正シマス。

誤解ノ点ハ L ノ $C(m)$ ヘノ寫像ガ $C(m)$ 全体トナルト云フ点デ、Lハ単ニ $C(m)$ ノ sub ring ト代数的ニ isomorphic ニナルニ過ギマセヌ。コノ寫像サレタLハ $C(m)$ デ一様収斂ノ意味デハ単ニ dense ニナル。

夫デ<u>Lガ N-ring ニナルカドウカ</u>ハ結局分ラナクナリマシタガ、Wiener ノ一般 Tauber 型定理、夫レヲ G ノ上ヘ拡張スルコトハ別ニ出来ル様ニ思ハレルノデ以下ニ述ベテ御指正ヲ願ヒタク思ヒマス。

定理LハGu然ソコヘ考ヘガ進ンダ結果ナノデスガ、独立ニ Segal ガ証明シタト豫告ヲ出シテ居ルモノデアルコトガ後デ思ヒ附キマシタコトヲ附言イタシマス。然シSegal ノハ m ノ位相ガ Stone 流 (Gelfand ノ第I ノ位相) ナノデ茲デハ<u>m ノ位相</u>ハ $U(M_0)=[M/|x_i(M)-x_i(M_0)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n]$,

$$x_1,\text{-----},x_n\in L$$

ノ意味ノ weak topology ニヨッテ定義サレタトシマス。

此ノ場合ハ m ト G ノ character group $\mathfrak{X}$ トノ対応ハ $M=L'$ ヲ除イテ homeomorph、$\mathfrak{X}$ ニ ideal point ヲ附ケ加ヘテ bicompact ニシタトキニハ m ト homeomorph ニナリマス。コノ事実ヲ証明ノ中ニ用ヒマス。

2. 定理1. I ヲ L ノ任意ノ closed ideal, I ヲ含ム凡エル maximal ideal ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ ($\subset \mathfrak{M}$) トスレバ, 任意ノ開集合 $O \supset \mathfrak{N}$ ニ對シテ

$$I \supset \prod_{M \in O} M.$$

補助定理1. X ヲ G ノ character group トスレバ, X ニ於ケル 0 ノ近傍 W_1, W_2, $W_1 \supset W_2$ ニ對シテ

$$\text{(i)} \quad u(x) = 0 \qquad x \in W_1$$

$$= 1 \qquad \chi \in W_2$$

$$0 \leqq u(\chi) \leqq 1, \qquad \chi \in X;$$

$$\text{(ii)} \quad 且\ u(\chi) = \int_G v(x)\, \chi(x)\, dx, \quad v(x) \in L^1 \text{ナル如キ}$$

モノが存在スル。

証明. W_1, W_2 ニ對シテ充分小サイ 0 ノ近傍 V_1 ヲ選ンデ

$$W_2 - V_1 - V_1 \subset W_1$$

ナルヤウニスル。$V_2 = W_2 - V_1$ トシ, V_1, V_2 ノ characteristic function ヲ φ_{V_1}, φ_{V_2} トスレバ

$$u_{W_1, W_2}(\chi)$$

$$\frac{1}{mV_1}\int_X \varphi_{V_2}(\chi - \chi_1)\, \varphi_{V_1}(\chi_1)\, d\chi,$$

トスレバ (i) ハ容易ニ分ル。(ii) ヲ証明スルタメニハ φ_{V_1}, φ_{V_2} ガ X ノ上ノ L^2 ノ函数デ, 従ッテ Parseval 定理及ビ Plancherel ノ定理カラ

$$u=\int_G \mathrm{U}(x)\,\chi(x)\,dx,\quad \mathrm{U}(x)\in L^1$$

ガ合ル。

補助定理2. 任意ノ $0 \supset n$ ニ對シテ，$x_0 \in I$，且ツ

$$x_0(M)\geqq 0,\quad x_0(M)\geqq \alpha>0 \quad \text{for all} \quad M\in \mathfrak{M}-0$$

ナル x_0 ガ存在スル。

證明. 假定ニヨリ任意ノ $M_1 \in \overline{n}$ ニ對シテ

$$x_{M_1}\in I,\ x_{M_1}(M_1)\neq 0$$

ナル x_{M_1} ガ存在スル. $\mathfrak{M}-0$ ハ closed，且各 $x_{M_1}(M)\in C(\mathfrak{M})$ ダカラ適當ナ有限箇ノ點 $M_1, M_2, \text{------}, M_n \in \mathfrak{M}-0$ ヲトレバ

$$x_0=\sum_{i=1}^{n} x_{M_i}\,x^*_{M_i}\in I,$$

且 $x_0(M)\geqq 0,\quad x_0(M)\geqq \alpha>0 \quad (M\in \mathfrak{M}-0)$

ナル樣ニデキル。

定理ノ證明。

(a) n ガ one-point set $(M)=(L^1)$ ノ場合，

$\overline{n}=n$ ハ明カ

0 ヲ與ヘラレタ n ヲ含ム open set トシ，$z\in \Pi M$ トスルト $z(M)\equiv 0$ for $M\in C$.

補助定理2 ニヨッテ $x_0\in I$ ヲ定義スレバ

$$\frac{z(M)}{X_0(M)} \in C(\mathfrak{M})$$

$\mathfrak{M} - \overline{O} = \mathrm{W}_2$ トシ, $\mathrm{W}_1 \supset \mathrm{W}_2$ ナルヤウニ選ンデ補助定理 1 ニヨッテ定義サレル函数 $u_{\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2}(x)$ ヲ用フレバ

$$v_0 = 1 - u_{\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2} \ (\equiv 1 - u_{\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2}(x)) \in L,$$

$$v_0(M) \equiv 0, \quad M \in O', \qquad 且 \quad \geqq 0 \ (M \in \mathfrak{M}),$$

而 $\in \mathrm{W}_1$ ヲ適當ニ選ンデ

$$v_0(M) + X_0(M) > 0 \quad \textit{for all} \ M \in \mathfrak{M}$$

ナラシメルコトガ出来ル。

從ッテ $\dfrac{1}{v_0 + X_0} \in L,$

然ルニ

$$\frac{z(M)}{X_0(M)} = \frac{z(M)}{v_0(M) + X_0(M)} \quad (M \in \mathfrak{M})$$

デアルカラ $v(M) = \dfrac{z(M)}{X_0(M)}$ ナル樣ナ $v \in L.$[1]

從ッテ $X_0 \in I$ カラ

$$z = X_0 \cdot v \in I$$

(b) $\mathfrak{n}$ ガ one-point set (M_0) ナ (L') ナル場合

(a) ノ場合ト同樣, 但シ $v_0(M)$ トシテハ直接ニ $u_{\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2}(x + x_0)$ ヲトレバヨイ, 但シ x_0 ハ M_0 ニ對應スル character.

(c) $\mathfrak{n}$ ガ任意ノ集合ナル場合.

$\overline{\mathfrak{n}}$ ノ各點M, 及ビソノ任意ノ近傍 O_M ニ對シテ (a) 又ハ

(b) デ行ッタ如キ函数 v_{O_M} ガ存在スル。各 $O_M \in \mathcal{O}$ ナル様ニトッテオイテ、$\overline{\mathfrak{N}}$ ノ閉集合ナルコトカラ有限ケノ $M_1, \ldots, M_n \in \overline{\mathfrak{N}}$ ヲトッテ

$$\sum_{i=1}^{n} v_{O_{M_i}}(M) + X_0(M) > 0 \quad \text{for all} \quad M \in \mathfrak{M}$$

ナラシメル様ニデキル。而モ

$$\sum_{i=1}^{n} v_{O_{M_i}}(M) + X_0(M) = X_0(M) \quad \text{for all} \quad M \bar{\in} \mathcal{O}$$

依ッテ同様ニシテ

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_{O_{M_i}} + X_0 \right)^{-1} \in L$$

且ツ $X_0 \cdot v = Z$ ナルコトガ云ヘル。（定理ノ証明了）

3. Wiener ノ一般 Tauber 型定理ノ場合ハ特ニ $\mathfrak{N}$ ガ one-point set (L_1) ダケノ場合デ、而モ特ニ簡単ナ場合ハ $K(x) \in L$, 且ツ

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx \neq 0 \quad \text{for all} \quad u \ (-\infty < u < \infty)$$

ノ場合デス。コノ最後ノ場合ハ補助定理 2 ガ要ラナクテ $X_0 = K \circ K^*$ ヲトレバヨイワケデス。

文献及註

(1) subring ニ於ケル同様ノ問題ハ Krein ガ既ニ証明シテヰル。例ヘバ Krein, C.R.J. R.S.S., 30-1, P.9.

$\mathfrak{N}$ガ one-point set (L_1) ダケノ場合ハ，$\mathfrak{N}$ヲ含ム凡ユル open set O ニ對スル凡テノ

$$\prod_{O} M$$

ヲ含ム最小ノ closed ideal I^* ガ L_1 ニ一致スルコトガ次ノ様ニ云ヘマス。即チ

補助定理 3. 任意ノ $K(g) \in L_1$ 及ビ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$\int \left| \int K(g-h) F(h)\, dh - K(g) \right| dg < \varepsilon.$$

ナル如キ $F(h) \in \prod_{O} M$，及ビ O ガ存在スル。

証明　$\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 \subset \cdots\cdots$ ヲ $\mathbb{X}$－空間 (character-space) ノ O ノ近傍ノ系列デ，$m\mathbb{W}_n < \infty$，$\sum \mathbb{W}_n = \mathbb{X}$ ナル如キモノトスル。

$$F_n(g) = \left| \frac{1}{m\mathbb{W}_n} \int_{\mathbb{W}_n} \chi(g)\, dx \right|^2$$

トスレバ補助定理1ニ於ケルト同様ノ考ヘニヨッテ $F_n(g) \in \prod_{O_n} M$ ナル様ナ O_n ガ存在スル。

$P(z)$ ヲ z－多項式トシ $P(0) = 0$ トスレバ $P(F_n(g)) \in \prod_{O_n} M$ ハ明カデアル。

L_1 ハ step-function ヲ dense subset トシテ含ムカラ定理ヲ step-function φ_A，且ツ $mA < \infty$ ナル時ニ証明スレバヨイ。

Lebesgue 定理カラ

$$\int \left| \frac{1}{mV} \int_V \varphi_A(g-h)\,dh - \varphi(g) \right| dg < \varepsilon,$$

$$\text{for all } V \subset V_\varepsilon$$

ナル様ナ V_ε ノ近傍 V_ε ガ存在スル。

V ニ対シテ n, 及ビ P ヲ適当ニトッテ

$$V_n = \mathop{E}_{h} [F_n(h) > 1-\varepsilon] \subset V,$$

$$E_n(h) = P(F_n(h)) \in L_1$$

$$\frac{1}{mV_n} \int_{V_n} |E_n(h) - 1|\,dh < \varepsilon,$$

$$\int_{G-V_n} |E_n(h)|\,dh < \varepsilon \cdot mV_n$$

ナル様ニ出来テ, 従ッテ

$$\int_G \left| \frac{1}{mV_n} \int_{V_n} \varphi_A(g-h)\,dh - \frac{1}{mV_n} \int_{V_r} \varphi_A(g-h)\,E_n(h)\,dh \right| dg$$

$$< 2\varepsilon \cdot mA$$

ガ簡単ニ分ル。従ッテ

$$\int \left| \frac{1}{mV_n} \int_G \varphi_A(g-h)\,E_n(h)\,dh - \varphi_A(g) \right| dg < C \cdot \varepsilon$$

ナラシメウル。

補助定理3ニヨッテ Wiener ノ一般 Tauber 型定理ガ群 G ノ上デ証明サレタコトニナル。但シ Krein ノ証明シタ Plancherel 及ビ Parseval 定理ヲ途中デ用ヒタコトヲ注意シタイ。補助定理3ハ全ク formal ナモノデアルト思ヒマスが, 念ノタメ証明シマシタ。

4. Rヲ(※)條件ノアル一般ナ normed ring, $\mathfrak{M}$ヲ凡エル maximal ideal ノ集合トスル.

$\mathfrak{M}$ノ位相ヲ Stone ニ從ッテ定義スル. 即チ$\mathfrak{M}$ヲ任意ノ部分集合 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{M}$ ニ對シテ closure $\bar{\mathfrak{a}}$ ヲ

$$\bar{\mathfrak{a}} = [M / M \supset \prod_{\mathfrak{a}} M]$$

ニヨッテ定義シタ bicompact T_1-space トスル.

然ルトキハ R ノ任意ノ closed ideal I ニ對シテ, Iヲ含ム凡エル maximal ideal ノ集合ヲ$\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ヲ含ム任意ノ開集合ヲ$\mathfrak{O}$トスレバ

$$I = \prod_{\mathfrak{O}} M$$

但シ <u>Rヲ semi-simple</u> ト假定スル.

Zヲ任意ノ元 $\in \prod_{\mathfrak{O}} M$ トスレバ $Z(M) \equiv 0 \ (M \in \mathfrak{O})$

$Z \in I$ ヲ云ヘバヨイ。

$\bar{\mathfrak{n}}$ヲ$\mathfrak{n}$ノ閉包トスレバ $\bar{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{O}$ (1)

$\mathfrak{M} - \mathfrak{O}$ハ閉集合ダカラ, 任意ノ $M \in \bar{\mathfrak{n}}$ ニ對シテ

$$X_M(M) \neq 0, \quad X_M(N) = 0 \ (N \in \mathfrak{M} - \mathfrak{O})$$

ナル元 $X_M \in R$, $X_M X_M^*(N) \neq 0$ ナルNノ集合ハ open, 且$\subset \mathfrak{O}$, ダカラ $\bar{\mathfrak{n}}$ ノ bicompact 性カラ適當ナ有限ケノ M_i ガ存在シテ,

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{M_i} X_{M_i}^*$$

ガ

---

(1) $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{n}}$ ナコトガ明カデス.

$$u_1(N) = 0 \quad (N \in \mathfrak{m} - O),$$

$$\underline{u_1(N) > 0 \quad N \in (\bar{\mathfrak{n}} ヲ含ム\ \textit{open set})\ O_1}$$

ナル様ニ出来ル。$O_1 \subset O$.

次ニIト$\bar{\mathfrak{n}}$トノ関係カラ，任意ノ$M \bar{\in} \bar{\mathfrak{n}}$ニ対シテ

$$y_M(M) \neq 0, \quad y_M(N) = 0 \qquad N \in \bar{\mathfrak{n}}$$

$$y_M \in I$$

ナルy_Mガ存在スル。前仝様ニ，$\mathfrak{m} - O_1$ガ*bicompact*

ナルコトカラ適當ナ

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n} y_{M_i} y_{M_i}^*$$

ニ對シテ

$$\underline{u_2(M) > 0 \quad \text{for} \quad M \in \mathfrak{m} - O_1}$$

$$u_2 \in I$$

ナル様ニ出来ル。依ッテ $u_1 + u_2$ ヲ考ヘレバ

$$(u_1 + u_2)(M) > 0 \qquad \textit{for all} \quad M \in \mathfrak{m}$$

$$(u_1 + u_2)(M) = u_2(M) \quad \textit{for all} \quad M \in \mathfrak{m} - O$$

從ッテ $(u_1 + u_2)^{-1}$ ガ存在シテ

$$\frac{z}{u_1 + u_2}(M) = \frac{z}{u_2}(M) \quad \textit{for all} \quad M \in \mathfrak{m}$$

ナルコトガ容易ニ分ル。Rガ*semi-simple*ナルコトカ

ラ $u = \dfrac{z}{u_1 + u_2}$ トスレバ

$$u_2 \cdot u = z \quad (\textit{in}\ R)$$

ガ成立ツ，從ッテ $Z \in I$（証明了）．

以上ハ Segal ノ証明シタ定理ガ單ニ semi-simple ナ (*)-normed ring ニ對シテ拡張デキルコトヲ証明シタモノデ，G ガ locally bicompact, commutative ナトキハ Segal ノ定理ガ出テ来ルワケデス。然シコノ証明ノ方法カラ，G ガ單ニ compact group ノ場合ノ Segal ノ定理ノ証明ガ出来レランイコトガ分レト思ヒマス。

又 G ガ locally bicompact, commutative group ノトキ，$\mathfrak{M}$ ノ二通リノ位相ガ一致スルランク思ハレル。

<u>追加</u>

定理 2 ガ全然一般ナ ring ニ對シテ成立ツコトガ後デ分リマシタ。